SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE ASTRATTA NON LINEARE

18 DICEMBRE 1986

INTRODUZIONE

In questo Seminario daremo un risultato di esistenza per la soluzione di una equazione differenziale astratta del tipo

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + f(t,u(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)_{|t=0} = w_0, \end{cases}$$

dove $L(t)$, $M(t)$ soddisfano condizioni, per esempio date nel Seminario precedente, che permettono di risolvere l'equazione lineare

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + f(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq \tau.$$

Data l'impostazione, le ipotesi riguarderanno regolarità hölderiana nel tempo.

Nel lavoro [2], G. Da Prato ha studiato in spazi analoghi l'equazione

$$u'(t) = F(u(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau;$$

vedremo però che sotto ipotesi abbastanza generali essa può essere messa nella forma che interviene in (1).

1) UNA EQUAZIONE ASTRATTA NON LINEARE

Studieremo la risolubilità dell'equazione

$$(2) \quad BMu + Lu = F(u),$$

dove B è un operatore lineare chiuso [senza perdita di generalità, a dominio denso] dallo spazio di Banach complesso E in sé, con

$$\|(B-z)^{-1}; L(E)\| \leq C(1+|z|)^{-1},$$

per tutti gli $z \in C$, $|\pi-\arg z| \leq \phi < \pi/2$,

L e M sono due operatori lineari chiusi dallo spazio di Banach complesso F in E, con L invertibile, $D(L) \subseteq D(M)$, tali che

$$\|L(zM+L)^{-1}; L(E)\| \leq C(1+|z|)^{\alpha}$$

per ogni z complesso, $|\arg z| \leq \pi-\phi+\varepsilon$, $0 \leq \alpha < 1$.

Denotiamo con Γ una curva nel piano complesso, orientata dal basso verso l'alto, che ha lo zero a sinistra e coincide con $\arg z = \pm\omega$, $\omega = \pi-\phi+\frac{\varepsilon}{2}$ per $|z|$ grande; posto $(E; D(B))_{\theta,\infty} = V$, si assume che il commutatore $[B;(zT+1)^{-1}]$, $T = ML^{-1}$, soddisfi

$$\max\{\|[B;(zT+1)^{-1}];L(E)\|,\|[B;(zT+1)^{-1}]; L(V)\|\} \leq C(1+|z|)^{\delta},$$

$0 \leq \delta < 1$, $z \in \Gamma$. Sia $\alpha < \theta < 1$.

Si è visto che c'è un $s_0 > 0$ tale che per ogni $s \geq s_0$, l'equazione

$$(B+s)\, Mu + Lu = h$$

ha una unica soluzione $u = L^{-1}\tilde{S}$, per ogni $h \in V$; inoltre, Lu e $BMu \in (E;D(B))_{\theta-\alpha,\infty}$. Per semplicità, supporremo $s = 0, \alpha=0$.

$\tilde{S}$ è espresso come $\tilde{S} = SK$, dove K è lineare limitato da V in sé e

$$S = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} z^{-1}(zT+1)^{-1}\, B(B-z)^{-1} dz.$$

Sulla F si faranno delle ipotesi che ci permettono di applicare il Teorema di Banach del punto fisso.

Posto $Lu = v$, la (1) diventa

$$BTv + v = F(L^{-1}v) = g(v).$$

Sia $r>0$, $0<\theta<1$, $S_1 = \{h \in V; \|h;V\| \leq r\}$,

$$\alpha_0 = \|\tilde{S} ; L(V)\| .$$

Vale allora

<u>Teorema 1</u>. Sotto le ipotesi precedenti, se $\alpha=0$ e

$$\|g(h); V\| \leq r/\alpha_0 \quad , \quad h \in S_1, \tag{3}$$

$$\|g(h_1) - g(h_2); V\| \leq \beta \|h_1-h_2;V\| \quad , \quad h_1,h_2 \in S_1, \tag{4}$$

dove $\alpha_0\beta<1$, allora (2) ha almeno una soluzione.

<u>Dimostrazione</u>. Sia $v = \tilde{S}g(k)$, $k \in V$. Allora

$$BTv + v = BT\tilde{S}g(k) + \tilde{S}g(k) = g(k)$$

e così, se $\tilde{S}g(k) = k$, si ottiene una soluzione di (2). Ora,

$$\|\tilde{S}g(k); V\| \leq r$$

e

$$\|\tilde{S}[g(h_1)-g(h_2)] ; V\| \leq \alpha_0\beta \|h_1-h_2;V\|. \quad \text{C.V.D.}$$

<u>Osservazione 1.</u> La (3) e la (4) sono soddisfatte se

$$\|F(x);\ V\| \leq r/\alpha_0 \text{ per ogni } x\in D(L),\ \|Lx;V\| \leq r,$$

$$\|F(x)-F(y);V\| \leq \beta\|L(x-y);V\|\ ,\ x,y\in D(L),\ \|Lx;V\|\leq r,\ \|Ly;V\|\leq r.$$

2) APPLICAZIONE A EQUAZIONI DIFFERENZIALI ASTRATTE NON-LINEARI

Elenchiamo qui di seguito tutte le assunzioni di cui avremo bisogno.

K1: $L(t)$, $M(t)$ *sono operatori lineari chiusi come nel* § 1, *tali che* $t \to T(t) = M(t)L(t)^{-1} \in C^{(2)}\ [0,\tau;L(X)]$

(in effetti, basterebbe che

$$\|T(t)-T(s);L(X)\|\leq C|t-s|^{\theta+\varepsilon},\ \|T'(t)-T'(s);L(X)\|\leq C|t-s|^{\theta+\varepsilon},$$

$\forall t,s\in[0,\tau]$, $0<\theta<1$, $\varepsilon>0$).

K2: $w_0 = T(0)v_0$, $v_0\in X$.

K3: *Esiste uno spazio di Banach* Y_1 *tali che valgono le immersioni continue*

$$D(L(t)) \subseteq Y_1 \subseteq Y\ ,\ \forall t\in[0,\tau]\ ,$$

e l'applicazione

$$(t,y) \to f(t,y)$$

è di classe $C^{(1)}$ *da* $[0,\tau]\times Y_1$ *in* X.

K4: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,L(0)^{-1}v_0) = 0$

K5: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

Si noti che se vale K5, allora

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x);\ L(Y_1,X)\right\| \to 0$$

se $|s| + \|x;Y_1\| \to 0$; quindi, fissato $\varepsilon>0$, si può trovare $\delta = \delta(\varepsilon)>0$, tale che $\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x);\ L(Y_1,X)\right\|<\varepsilon/2$ per ogni s, x, con $|s| + \|x;Y_1\| < \delta(\varepsilon)$, $s\geq 0$.

Quindi, se $\|L(0)^{-1}v_0;Y_1\|<\delta(\varepsilon)/2$ e $0\leq s<\delta(\varepsilon)/2$, scrivendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s,L(0)^{-1}v_0+x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(s,L(0)^{-1}v_0+x) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,L(0)^{-1}v_0)\right]+ \frac{\partial f}{\partial x}(s,L(0)^{-1}v_0),$$

si vede che

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(s,L(0)^{-1}v_0+x);L(Y_1,X)\right\|<\varepsilon$$

purché $s\geq 0$ e $\|x;Y_1\|$ sono sufficientemente piccoli.

Ovviamente, la K4 implica subito questa conclusione.

K6: *Esistono* $k>0$, $1\geq\omega\geq\theta$ *tali che*

$$\|L(t)^{-1}-L(s)^{-1};\ L(X;Y_1)\| \leq k\ |t-s|^{\omega}, \quad t,s\in[0,\tau].$$

K7: *Esistono* $k_1>0$, $\theta\leq\delta\leq 1$, *tali che*

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(s,x_2);\ L(X,Y_1)\right\| \leq k_1(|t-s|^{\delta}+\|x_1-x_2;Y_1\|),$$

per ogni $t,s\in[0,\tau]$ *e ogni* x_1,x_2 *in un intorno di* $L(o)^{-1}v_0$ *in* Y_1.

Osserviamo che K7 è soddisfatta se f è di classe $C^{(2)}$ su $[0,\tau]\times Y_1$.

Ciò premesso, si ha il

Teorema 2. Valgano K1,2,3,4,6,7 oppure K1,2,3,5,6,7. Sia $f(0,L(0)^{-1}v_0)-(1+T'(0)) \in R(T)(0))\ u_0$. Allora il problema (1) ha almeno una soluzione $u = u(t)$ su un intervallo $[0,\tau]$, τ sufficientemente piccolo [purché $L(0)^{-1}v_0$ sia in un intorno di 0 in Y_1, sotto le assunzioni K1,2,3,5,6,7]. Inoltre $t \to L(t)u(t)$, $d(M(t)u(t))/dt$ sono elementi di $C^{\theta}[0,\tau;X]$.

Dimostrazione. Posto

$$L(t)u(t) - v_0 - v_1 t = w(t),$$

con $v_1 \in X$ da determinarsi, (1) si trasforma in

$$\frac{d}{dt}(T(t)w(t)) + w(t) = g(t,w(t)),\ 0 \leq t \leq \tau,$$

$$T(t)w(t)\Big|_{t=o} = 0,$$

dove

$$g(t,w(t)) = f(t,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t])-T'(t)[v_0+v_1t]-T(t)v_1-v_0-tv_1=$$

$$= F(w)(t).$$

Se prendiamo $E = C_0[0,\tau;X]$, $Bu = u'$, $D(B)=\{u \in C^{(1)}[0,\tau;X]:u(0)=u'(0)=0\}$, (e così $(E;D(B))_{\theta,\infty} = C_0^{\theta}[0,\tau;X]$), si tratterà di verificare le condizioni del Teorema 1.

Prima di tutto, la $F(w)(0) = 0$ si legge

$$f(0,L(0)^{-1}v_0)-(T'(0)+1)v_0 = T(0)v_1,$$

cioè $f(0,L(0)^{-1}v_0)-(1+T'(0))v_0 \in R(T(0))$.

Sia

S' = sfera chiusa di centro l'origine e raggio r in $C_0^\theta[0,\tau;X]$.

Il primo passo consiste nel valutare $\|F(w);C_0^\theta[0,\tau;X]\|$, $w \in S'$.

Poiché $f(0,L(0)^{-1}v_0) = T(0)v_1 + (1+T'(0))v_0$,

$$\|F(w)(t);X\| =$$

$$= \|f(t,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t]) - f(0,L(0)^{-1}v_0)+[T(0)-T(t)]v_1 +$$

$$+ [T'(0)-T'(t)]v_0 - tT'(t)v_1 - tv_1;X\| \leq$$

$$\leq \|f(t,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t]) - f(0,L(0)^{-1}v_0);X\| +$$

$$+ \|T(t)-T(0);L(X)\| \, \|v_1;X\| + \|T'(t)-T'(0);L(X)\| \, \|v_0;X\| +$$

$$+ t\|T'(t)+1;L(X)\| \, \|v_1;X\| \leq$$

$$\leq \|f(t,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t]) - f(0,L(0)^{-1}v_0);X\| + C\tau^{\theta+\varepsilon} =$$

$$= \|(1);X\| + C\tau^{\theta+\varepsilon}.$$

Ora,

$$(1) = \{f(t,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t]) - f(0,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t])\} +$$

$$+ \{f(0,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t]) - f(0,L(0)^{-1}v_0)\} =$$

$$= t\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial \xi}(t\eta,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t])\,d\eta +$$

$$+\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,L(0)^{-1}v_0+\eta[L(t)^{-1}(w(t)+v_0+v_1t)-L(0)^{-1}v_0])[L(t)^{-1}(w(t))+v_0+v_1t)-L(0)^{-1}v_0)d\eta.$$

Ora,

$$\|L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t]-L(0)^{-1}v_0;Y_1\| \leq$$

$$\leq \|L(t)^{-1}-L(0)^{-1};L(X;Y_1)\| \; \|w(t)+v_0+v_1t;X\|+\|L(0)^{-1};L(X,Y_1)\| \; \|w(t)+tv_1;X\| \leq$$

$$\leq kt^{\omega}(\tau^{\theta} \, \|w\|+ r \, \|v_1;X\|+\|v_0;X\|)+C(r^{\theta} \, \|w\|+\tau\|v_1;X\|),$$

dove $\|w\| = \|w;C_0^{\theta}[0,\tau;X]\|$. Così esiste $h''>0$ tale che $\|(1);X\| \leq k'' \, \tau^{\theta} \to o$ per $\tau \downarrow o$.

Valutiamo $\|F(w)(t) - F(w)(s);X\|$. Si ha

$$\|F(w)(t) - F(w)(s);X\| \leq$$

$$\leq \|f(t,L(t)^{-1}[w(t)+v_0+v_1t])-f(s,L(s)^{-1}[w(s)+v_0+v_1s]);X\| +$$

$$+ (\|T'(t)-T'(s);L(X)\| \; \|v_0;X\|+\|tT'(t)-sT'(s);L(X)\| \; \|v_1;X\| +$$

$$+ \|T(t)-T(s);L(X)\| \; \|v_1;X\| + |t-s| \; \|v_1;X\|) = (2) + (3).$$

Ma

$$(3)\,|t-s|^{-\theta} \leq C\|v_0;X\| \; |t-s|^{\varepsilon}+C'\|T'(t)-T'(s);L(X)\| \; |t-s|^{-\theta}\|v_1;X\| +$$

$$+ C''\|v_1;X\| \; |t-s|^{1-\theta}+C_1|t-s|^{\varepsilon} \; \|v_1;X\| + |t-s|^{1-\theta}\|v_1;X\| \leq$$

$$\leq C \, \tau^{\min(\varepsilon,1-\theta)} \to 0 \quad \text{per } \tau \downarrow o.$$

Posto $\phi(t) = w(t) + v_0+v_1t$, si ha

$$(2) \qquad \leq \int_0^1 |t-s| \, \| \frac{\partial f}{\partial \xi_1} (s+\eta(t-s), L(t)^{-1}\phi(t)); X \| d\eta \, +$$

$$+ \int_0^1 \| \frac{\partial f}{\partial x} (s, L(s)^{-1}\phi(s)+\eta[L(t)^{-1}\phi(t)-L(s)^{-1}\phi(s)])[L(t)^{-1}\phi(t) \, -$$

$$- L(s)^{-1}\phi(s)]; X \| d\eta .$$

Il primo integrale si maggiora con $K_1|t-s|$, perché $L(t)^{-1}\phi(t)$ è in un intorno di $L(o)^{-1}v_0$, τ piccolo, in Y_1.

Quanto al secondo addendo, si ha

$$\| \frac{\partial f}{\partial x}(s, L(s)^{-1}\phi(s)+\eta[L(t)^{-1}\phi(t)-L(s)^{-1}\phi(s)]); L(Y_1;X) \| \leq$$

$$\leq \| \frac{\partial f}{\partial x}(s, L(s)^{-1}\phi(s)+\eta[L(t)^{-1}\phi(t)-L(s)^{-1}\phi(s)]) - \frac{\partial f}{\partial x} (0, L(0)^{-1}v_0); L(Y_1;X) \| \, +$$

$$+ \| \frac{\partial f}{\partial x} (0, L(0)^{-1}v_0); L(Y_1, X) \| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{se}$$

$$|s| + \| L(s)^{-1}\phi(s)+\eta[L(t)^{-1}\phi(t)-L(s)^{-1}\phi(s)]-L(0)^{-1}v_0; Y_1 \| \leq$$

$$\leq |s| + \| L(s)^{-1}[\phi(s)-v_0]; Y_1 \| + \| [L(s)^{-1}-L(0)^{-1}]v_0; Y_1 \| \leq$$

$$\leq |s| + \| L(s)^{-1}[\phi(s)-v_0]; Y_1 \| + \| [L(s)^{-1}-L(0)^{-1}]v_0; Y_1 \| \, +$$

$$+ \| L(t)^{-1}\phi(t) - L(s)^{-1}\phi(s); Y_1 \| \leq$$

$$\leq \tau + C \| w(s)+sv_1; X \| + C\tau^{\omega} \| v_0; X \| + \| L(t)^{-1}[\phi(t)-\phi(s)]; Y_1 \| \, +$$

$$+ \| [L(t)^{-1}-L(s)^{-1}]\phi(s); Y_1 \| \leq$$

$$\leq \tau + C \| w \| \tau^{\theta} + C\tau \| v_1; X \| + C\tau^{\omega} \| v_0; X \| + C \| \phi \| \tau^{\theta} + kt^{\omega} \| \phi \| \leq$$

$$\leq \tau + Cr\tau^{\theta} + C\tau \| v_1; X \| + C\tau^{\omega} \| v_0; X \| + Cr\tau^{\theta} + k\tau^{\omega} r$$

è sufficientemente piccolo, cioè, se τ è piccolo.

Inoltre,

$$|t-s|^{-\theta}\|L(t)^{-1}\phi(t)-L(s)^{-1}\phi(s);Y_1\| \leqq$$

$$\leqq C|t-s|^{-\theta}\|\phi(t)-\phi(s);X\|+(|t-s|^{-\omega}\|L(t)^{-1}-L(s)^{-1};L(X_1;Y_1)\|)|t-s|^{\omega-\theta}\cdot\frac{\|\phi(s)-\phi(0);X\|}{s^{\theta}}\tau^{\theta} \leqq$$

$$\leqq C\|\phi\|+C'\tau^{\theta}\|\phi\|\leqq C''(1+\tau^{\theta})(r+\|v_0;X\|+\tau\|v_1;X\|+\tau^{1-\theta}\|v_1;X\|)$$

perché $\|\phi\| = \|w+v_0+v_1t\|$.

Di qui,

$$\sup_{\substack{0\leqq t,s\leqq\tau \\ t\neq\tau}} |t-s|^{-\theta}\|F(w)(t)-F(w)(s);X\|$$

è "piccolo" purché r e ε sono sufficientemente piccoli.

Stimiamo

$$\|F(w_1)-F(w_2)\|,\quad w_1,w_2\in S'.$$

Si ha

$$\|F(w_1)(t)-F(w_2)(t);X\| =$$

$$= \|f(t,L(t)^{-1}[w_1(t)+v_0+v_1t])-f(t,L(t)^{-1}[w_2(t)+v_0+v_1t]);X\| \leqq$$

$$\leqq\int_0^1\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,L(t)^{-1}[w_2(t)+v_0+v_1t]+\eta\, L(t)^{-1}[w_1(t)-w_2(t)])L(t)^{-1}(w_1(t)-w_2(t));X\|d\eta\leqq$$

$$\leqq \varepsilon\|L(t)^{-1};L(X;Y_1)\|t^{-\theta}\|w_1(t)-w_2(t)-w_1(o)+w_2(o);X\|\tau^{\theta} \leqq C\varepsilon\tau^{\theta}\|w_1-w_2\|.$$

Inoltre, se $\phi_1(t) = w_1(t)+v_0+v_1t$, $\phi_2(t)=w_2(t)+v_0+v_1t$,

$$F(w_1)(t)-F(w_2)(t) - F(w_1)(s)+F(w_2)(s) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, L(t)^{-1}\phi_2(t)+\eta L(t)^{-1}[w_1(t)-w_2(t)])L(t)^{-1}[w_1(t)-w_2(t)]d\eta -$$

$$- \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(s, L(s)^{-1}\phi_2(s)+\eta L(s)^{-1}[w_1(s)-w_2(s)])L(s)^{-1}[w_1(s)-w_2(s)]d\eta$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, L(t)^{-1}\phi_2(t)+\eta L(t)^{-1}[w_1(t)-w_2(t)])L(t)^{-1}[w_1(t)-w_2(t)-w_1(s)+w_2(s)]d\eta +$$

$$+ \int_0^1 \{\frac{\partial f}{\partial x}(t, L(t)^{-1}\phi_2(t)+\eta L(t)^{-1}[w_1(t)-w_2(t)] - \frac{\partial f}{\partial x}(s, L(s)^{-1}\phi_2(s) +$$

$$+ \eta L(s)^{-1}[w_1(s)-w_2(s)])\} \cdot L(t)^{-1}[w_1(s)-w_2(s)]d\eta +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(s, L(s)^{-1}\phi_2(s)+\eta L(s)^{-1}[w_1(s)-w_2(s)])\{L(s)^{-1}-L(s)^{-1}\}[w_1(s)-w_2(s)]d\eta =$$

$$= (4) + (5) + (6).$$

In virtù delle assunzioni fatte e ripetendo ragionamenti analoghi ai precedenti, si veda

$\|(4);X\| \leq C\varepsilon \|w_1-w_2\| \; |t-s|^{\theta}$ perché

$$\|L(t)^{-1}[\phi_2(t)+\eta(w_1(t)-w_2(t))]-L(0)^{-1}v_0;Y_1\| \leq$$

$$\leq C'\|\phi_2(t)+\eta[w_1(t)-w_2(t)]-v_0;X\|+(t^{-\omega}\|L(t)^{-1}-L(0)^{-1};L(X,Y_1)\|)\|v_0;X\|\tau^{\omega} \leq$$

$$\leq C''\|w_2(t)+tv_1+\eta[w_1(t)-w_2(t)];X\|+C'''\|v_0;X\|\tau^{\omega} \leq$$

$$\leq C''\tau\|v_1;X\|+2C''r\tau^{\theta}+C'''\|v_0;X\|\tau^{\omega} \to 0 \quad \text{per } \tau \downarrow 0.$$

Quanto a $\frac{(5)}{|t-s|^\theta}$, $\frac{(6)}{|t-s|^\theta}$, la loro norma in X viene maggiorata con una costante per $\|w_1-w_2\|\tau^\theta$, in forza della definizione di $\|\phi\|$ e di K6,7. [Si noti che $\omega,\delta\geq\theta$]

Anche qui si sfrutta la stima

$$\|w(t);X\| \leq \|w\|\tau^\theta.$$

Segue che esiste $c_2>0$ tale che

$$\|F(w_1)-F(w_2)\| \leq C_2(\varepsilon+\tau^\theta) \|w_1-w_2\|, \quad w_1,w_2\in S'.$$

Basterà mandare ε e τ a zero per ottenere una contrazione. C.V.D.

Osservazione 2. Se $D(L(t)^{\tilde{\alpha}})$ è indipendente da $t\in[0,\tau]$, con $0<\tilde{\alpha}\leq 1$ ed esistono $C,C_1,C_2>0$ tali che

$$C_1\|L(t)^{\tilde{\alpha}}x;X\| \leq \|L(0)^{\tilde{\alpha}}x;X\|\leq C_2\|L(t)^{\tilde{\alpha}}x;X\| ,$$

per ogni $x\in D(L(0)^{\tilde{\alpha}}$,

$$\|L(0)^{\tilde{\alpha}}[L(t)^{-1}-L(s)^{-1}];L(X)\| \leq C|t-s|^\omega, \quad \omega\geq\theta,$$

allora come Y_1 si può prendere $D(L(0)^{\tilde{\alpha}})$.

Questa condizione si può confrontare con quella di H. Amann in [1]. Se $\tilde{\alpha}=1$, essa equivale a

$$\|[L(t)-L(s)]L(0)^{-1};L(X)\| \leq C|t-s|^\omega,$$

di H. Tanabe e P.E. Sobolevskii.

Osservazione 3. Nelle applicazioni concrete a equazioni alle derivate parziali, X potrebbe essere uno spazio $L^q(\Omega)$, Ω un dominio limitato di R^n,

$L(t)$ un operatore ellittico a dominio $D(L(t))$ dipendente da t (nelle condizioni ai limiti), con $D(L(t)) \subseteq W^{k,q}(\Omega) = Y_1$.

Osservazione 4. Il problema non lineare

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = h(t,u(t)), \quad 0 \le t \le \tau, \qquad M(t)u(t)_{|t=0} = w_o,$$

può essere ridotto ad un problema del tipo (1) nel caso seguente.

Supponiamo che esista

$$\frac{\partial h}{\partial x}(t,u_o) = -L(t),$$

$$w_o = M(o)L(o)^{-1}L(o)u_o = T(o)v_o.$$

Allora (5) diventa

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + F(t,u(t)), \quad 0 \le t \le \tau,$$

$$M(t)u(t)_{|t=0} = T(0)v_o,$$

$$F(t,u) = h(t,u) - \frac{\partial h}{\partial x}(t,u_o)u.$$

Basterà allora assumere che h sia regolare su $[o,\tau] \times Y_1$, a valori in X, $Y_1 \subseteq Y$, $\frac{\partial h}{\partial x}(t,u_o)$ sia la restrizione a $D(L(t))$ di un operatore limitato da Y_1 in X e valgano H6,7, con h al posto di f. Si noti che, poiché

$$\frac{\partial h}{\partial x}(t,u) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,u) - \frac{\partial f}{\partial x}(t,u_o),$$

si ha $\frac{\partial h}{\partial x}(0,u_o) = \frac{\partial h}{\partial x}(0,L(0)^{-1}v_o) = 0.$

Non è difficile dare condizioni per trattare, mediante riduzione a problemi del tipo (1), l'equazione integro-diferenziale

$$\frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + \int_0^t K(t-s)u(s)ds,$$

dove $K(t)$ è limitato da Y_1 in X, e il problema (Navier-Stokes astratto)

$$u'(t) = -A(t)u(t) + p(t) + F(u(t)) \ , \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$Cu(t) = 0 \ , \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$u(0) = u_0.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] AMANN, H.: On abstract parabolic fundamental solutions, in corso di stampa su "J. Math. Soc. Japan".

[2] DA PRATO, G.: Abstract differential equations, maximal regularity, and linearization, Proc. Symposia Pure Math. 45 (1986), Part I (ed. T. KATO), 359-370.